

17. Теория на графите – общи  
понятия. Същност на  
мрежовите модели.

Приложение на мрежови  
модели при управление на  
проекти и програми

# Структура

- *Общи понятия от Теорията на графите, използвани при мрежовите модели*
- *Същност на мрежовите модели*
- *Приложение на мрежови модели при управление на проекти и програми*

*Общи понятия от Теорията на  
графите, използвани при  
мрежовите модели*

# ОСНОВНИ ПОНЯТИЯ

- Граф: Множество от елементи и законът за свързването им

$$G = (X, \Gamma)$$

- Елементи:  $X = X_1, X_2, \dots, X_n$  - Непразно множество от възли (върхове)
- Закон за свързване на елементите –  $\Gamma$  (задава неподредено или подредено бинарно отношение между елементите)
- $X_1, X_2,$
- $X_2, X_3,$
- $X_3, X_4,$
- $X_1, X_3,$

# Основни понятия - продължение

- ребро - неподредена двойка елементи  $a (X_i, X_j)$
- $X_i$  и  $X_j$  се наричат възли или върхове на реброто
- дъга - подредена двойка елементи  $a \overrightarrow{(X_i, X_j)}$
- $X_i$  се наричат начален възел на дъгата
- $X_j$  - краен възел на дъгата

# Класификация на графите

- В зависимост от броя на възлите:
  - Крайни
  - Безкрайни
- В зависимост от наличието или липсата на подреждане на възлите на ребрата:
  - Неориентирани - Законът за свързване на елементите, задава неподредено бинарно отношение между елементите
  - Ориентирани - Законът за свързване на елементите, задава подредено бинарно отношение между елементите

Вниманието основно ще се насочи към изследване на крайни ориентирани графи.

# Основни понятия - продължение

- Път - последователност от дъги, при които крайният възел на едната дъга съвпада с началния възел на следващата  
    *L* - дължина на пътя
- Контур - Път, при който началният и крайният възел съвпадат —————→
- Дължина на дъгата - На всяка дъга може да се присвои реално число,  $d(ak) \geq 0$ . В зависимост от характера на изграждания модел, числото може да означава време, разстояние, разходи
- Дължина на пътя - Сума от дължините на дъгите, които съставляват пътя.

# Задачи, решавани с помощта на теорията на графите:

- Мрежово планиране и анализ
- Оптимизация на назначенията
- Оптимизация на мрежи
- Задача за търговския пътник и др.



# *Същност на мрежовите модели*

- Мрежов модел (мрежов график) – нагледно графическо изображение на комплекс от операции, реализацията на които води до постигане на поставени цели. В модела се изобразяват не само съвкупността от всички операции, но и технологичните и логическите връзки, които съществуват между тях.
- Мрежовото моделиране е ядро на програмния и проектния подходи в управлението. То дава възможност за координация и управлението на действия на един или няколко изпълнители.

# *Приложение на мрежови модели при управление на проекти и програми*

- За първи път методите на мрежовото планиране се използват в САЩ в края на 50-те години, главно за военни цели - за планиране на ракетни програми. По-късно започва масовото използване на мрежовото планиране в различни области на стопанството – проектиране и осъществяване на космически полети, при построяване на сложни производствени комплекси, в строителството и др.
- В съвременни условия методите на мрежовото планиране намират широко приложение при разработване и изпълнение на проекти от най-различен характер и големина.

# 18. Елементи и логически правила за построяване на мрежов модел. Параметри на мрежовия модел

# *Елементи на мрежовия модел*

1. Работа (дейност, операция, активност) - проектен елемент, логически отделен от другите елементи, необходим за постигане на поставените цели. В мрежовия модел работите се изобразяват като дъги.

Възможно е работата да бъде:

- действителна работа - нейното изпълнение изисква разход на време и на ресурси
- изчакване - нейното изпълнение изисква само разход на време
- фиктивна работа - изпълнението ѝ не изисква нито време, нито ресурси, а отразява логически връзки

## *Елементи на мрежовия модел – продължение*

2. Събитие - символизира резултатът от една работа и готовността за започване на следваща работа. Няма продължителност във времето. В мрежовия модел събитията се изобразяват като възли.

Възможни са:

- Начално за проекта събитие (с него се стартира изпълнението на проекта).
- Крайно за проекта събитие - символизира приключване на проекта.

# *Елементи на мрежовия модел – продължение*

3. Път - Непосредствена последователност от работи, при които крайното събитие на една работа съвпада с началното събитие на следващата работа.

Възможни са:

- Пълен път - път, който свързва началното и крайното за проекта събитие
- Критичен път - път без резерв от време или най-дългият път в мрежовия график.

## *Логически правила за построяване на мрежов модел*

- 1. Всяка работа трябва да има начално и крайно събитие.
- Всяко събитие (с изключение на началното и крайното за проекта) имат предшестваща и следваща ги работа.
- Началното за проекта събитие няма предшестваща го работа. Крайното за проекта събитие няма следваща го работа.
- Едно събитие може да бъде начално или крайно за няколко работи.

## *Логически правила за построяване на мрежов модел – продължение*

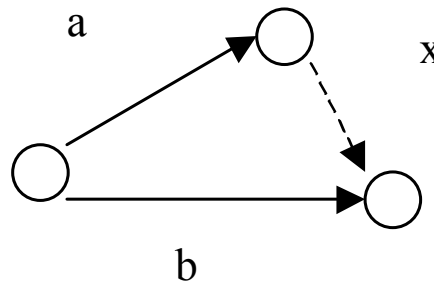
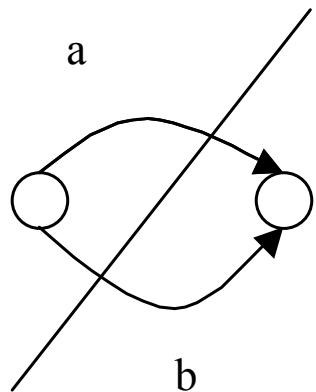
- 2. Едно събитие настъпва тогава, когато се изпълнят всички работи, които го предшестват.

Една работа може да започне тогава, когато настъпи началното за нея събитие.



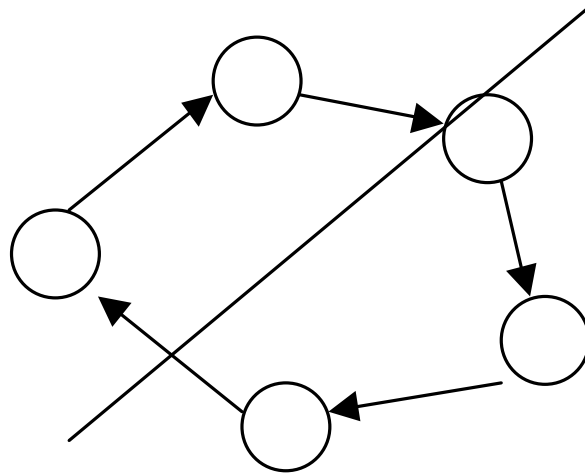
## *Логически правила за построяване на мрежов модел – продължение*

3. Две работи не могат да имат едно и също начално и крайно събитие. Ако е необходимо двете работи се сливат в една или се въвежда фиктивно събитие и фиктивна работа



## *Логически правила за построяване на мрежов модел – продължение*

4. В мрежовия модел не се допуска контур. При разработване на модела контурите се търсят и отстраняват

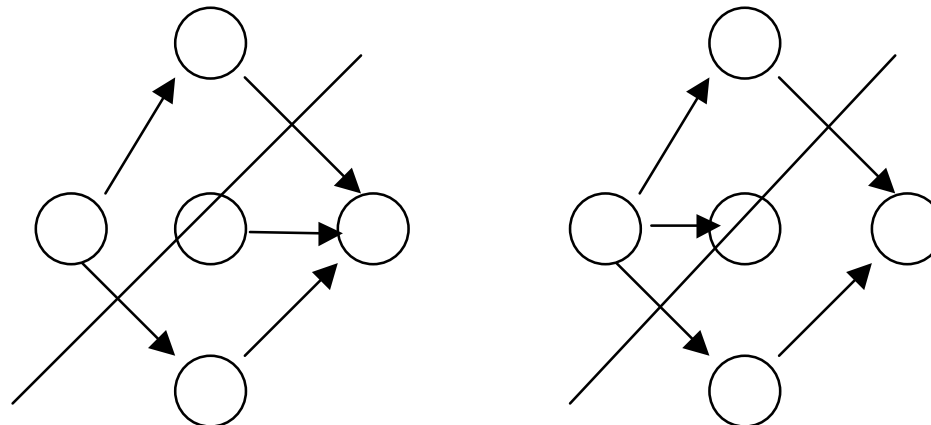


*Логически правила за построяване на  
мрежов модел – продължение*

5. Събитията се номерират, като не се допуска крайно за определена работа събитие да има по-малък номер от началното за същата работа събитие.

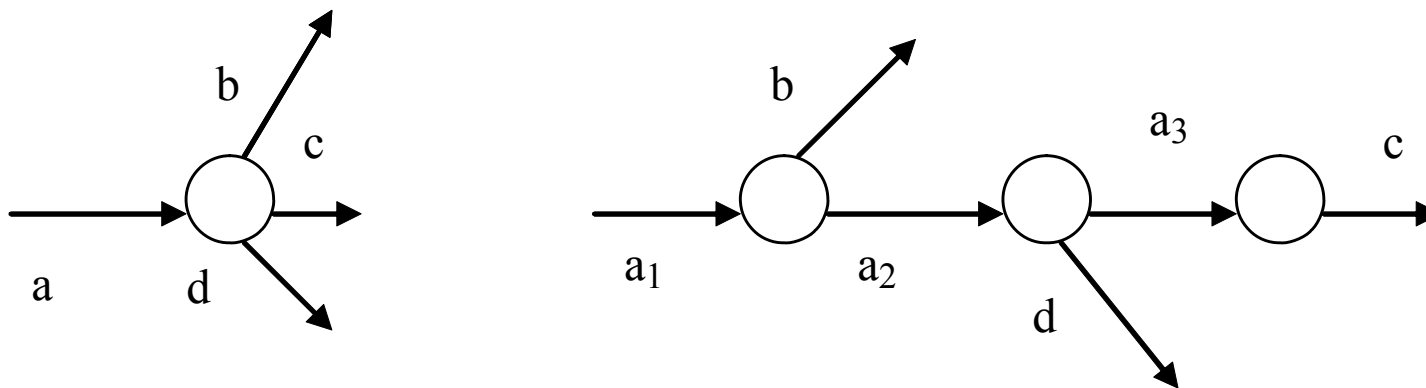
## *Логически правила за построяване на мрежов модел – продължение*

6. В мрежовия модел не се допуска събитие, което да не е крайно за нито една работа (освен началното за проекта събитие), или събитие, което да не е начално за нито една работа (освен крайното за проекта събитие).



## *Логически правила за построяване на мрежов модел – продължение*

### 7. Изобразяването на сложни събития става с разделянето им на части



## Параметри на мрежовия модел

- Времетраене на работите –  $Y_{ij}$
- Най-ранен срок за настъпване на събитие  $i$  –  $t_i'$
- Най-късен срок за настъпване на събитие  $i$  –  $t_i''$

При събития от критичния път  $t_i' = t_i''$

# Параметри на мрежовия модел – продължение

- Ранно начало на работа  $ij$  –  $t_{рн}$
- Ранно завършване на работа  $ij$  -  $t_{рз}$
- Късно начало на работа  $ij$  -  $t_{кн}$
- Късно завършване на работа  $ij$  –  $t_{кз}$
- Резерв от време за събитие  $i$  -  $R_i$

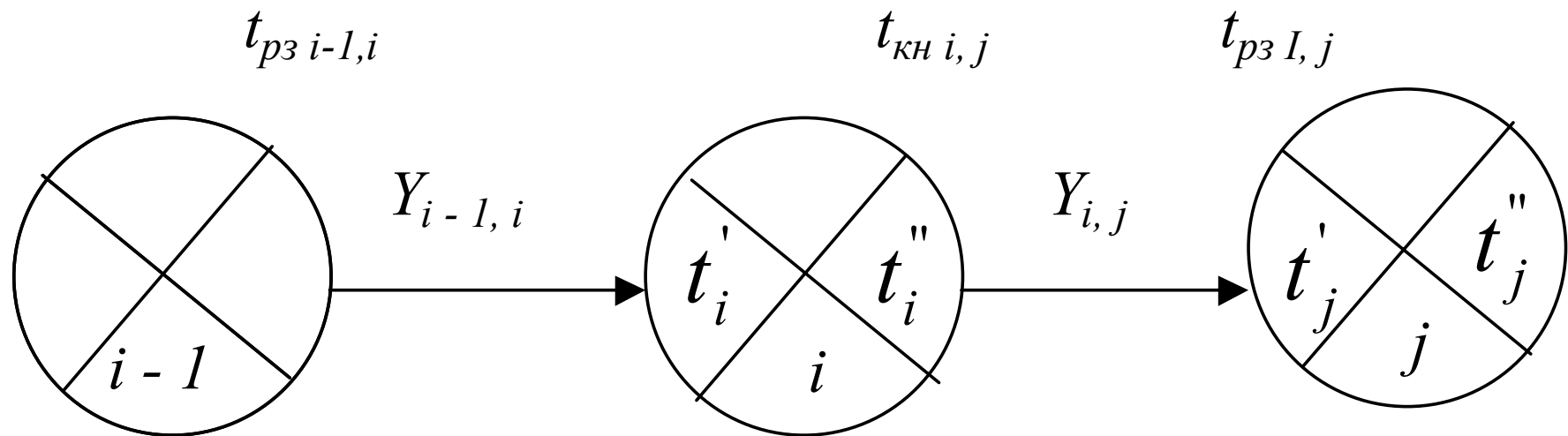
# 19. Алгоритъм за решаване на мрежов модел



# Стъпки при решаване на мрежов модел

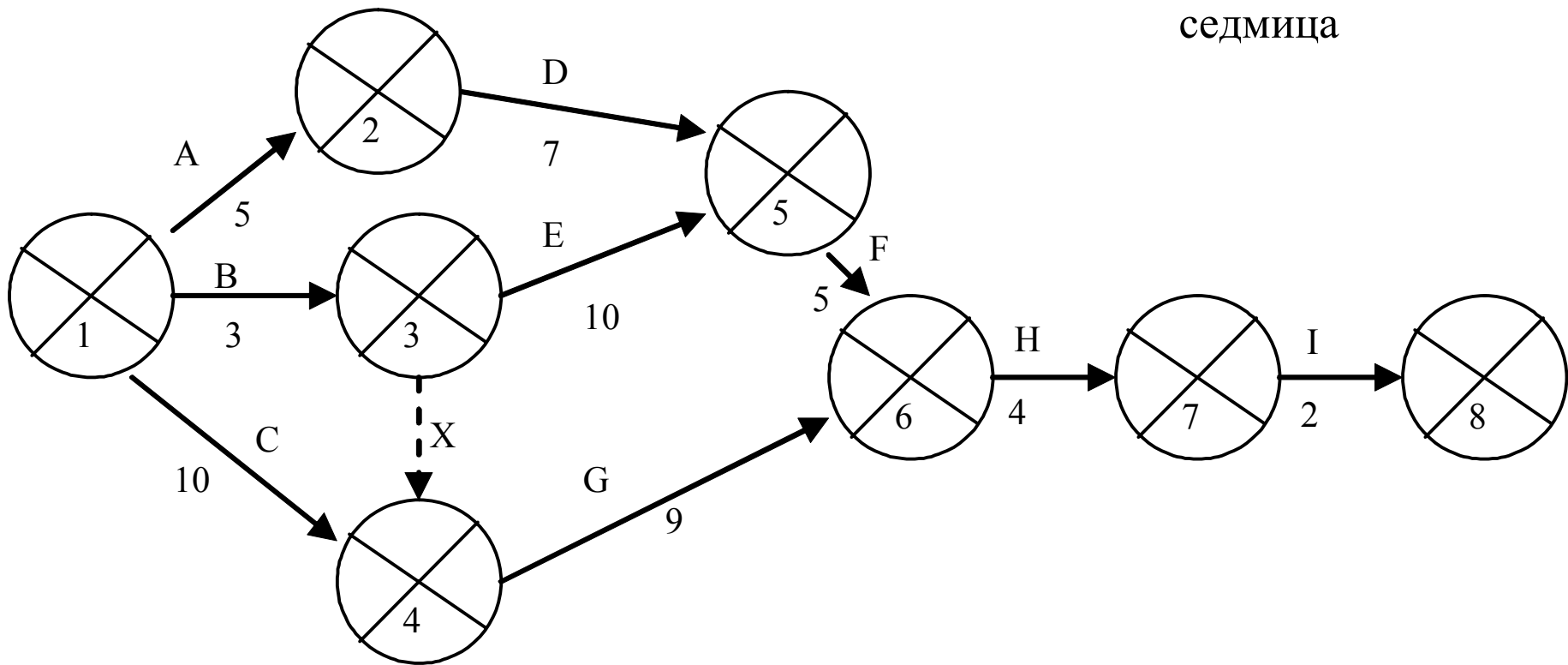
1. Определяне на ранните срокове за настъпване на събитията
2. Определяне на късните срокове за настъпване на събитията
3. Определяне на параметрите на работите
4. Определяне на резерва от време

# Начин на означение



Да се реши следния мрежов модел:

Мерна единица за време –  
седмица



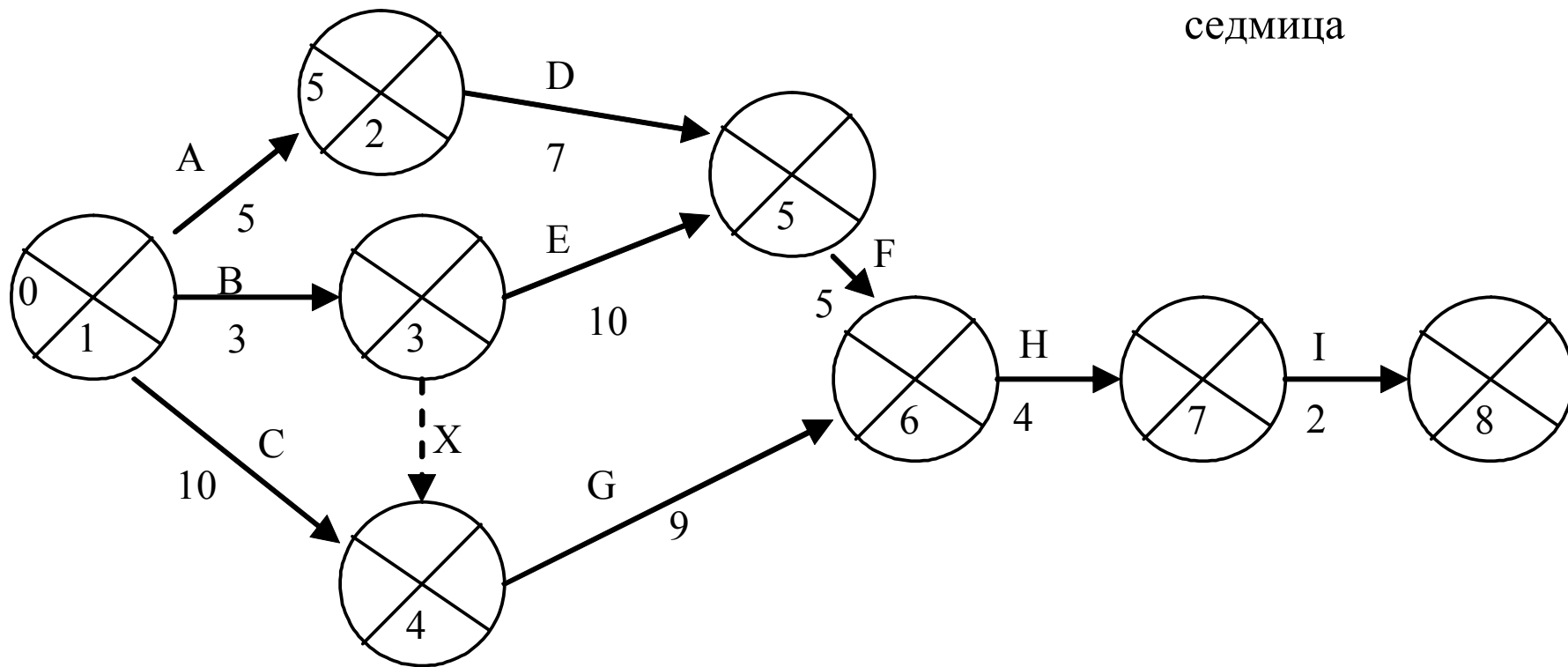
# 1. Определяне на ранните срокове за настъпване на събитията

$$t'_j = \begin{cases} 0, \text{ при } j = 1 & (\text{начално събитие}) \\ \max_{i < j} (t'_i + y_{ij}) & \end{cases}$$

Ранният срок за настъпване на събитието е равен на дължината на най-дългия път от началното за проекта събитие до съответното събитие

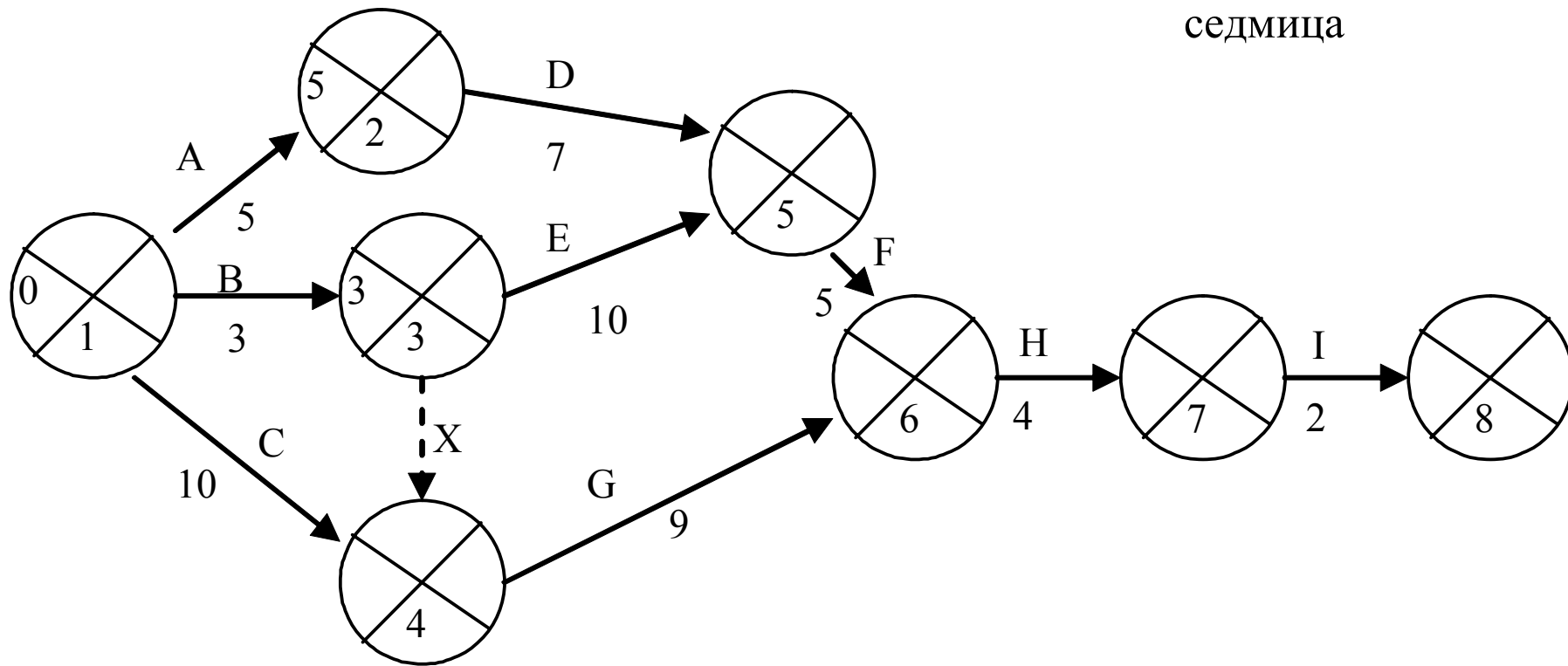
# Определяне на ранния срок за настъпване на събитие 2

Мерна единица за време – седмица



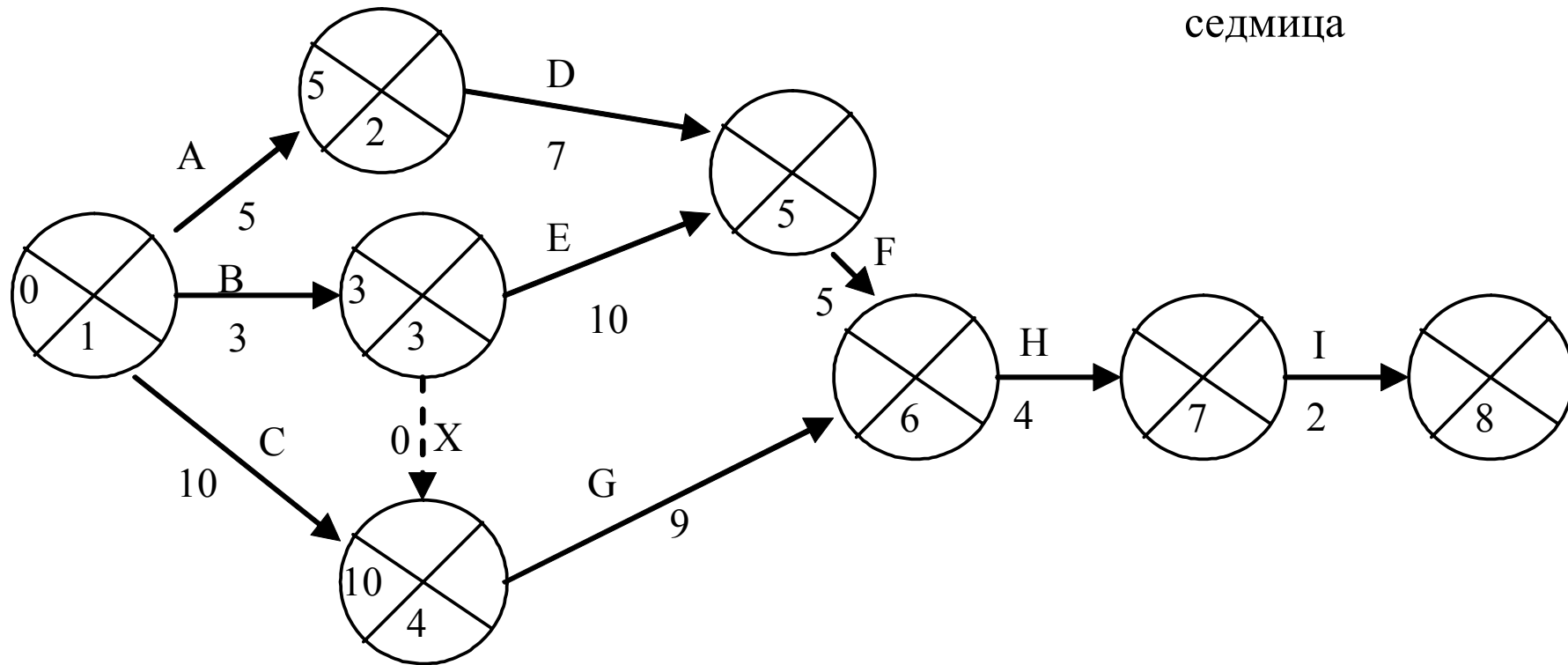
# Определяне на ранния срок за настъпване на събитие 3

Мерна единица за време – седмица

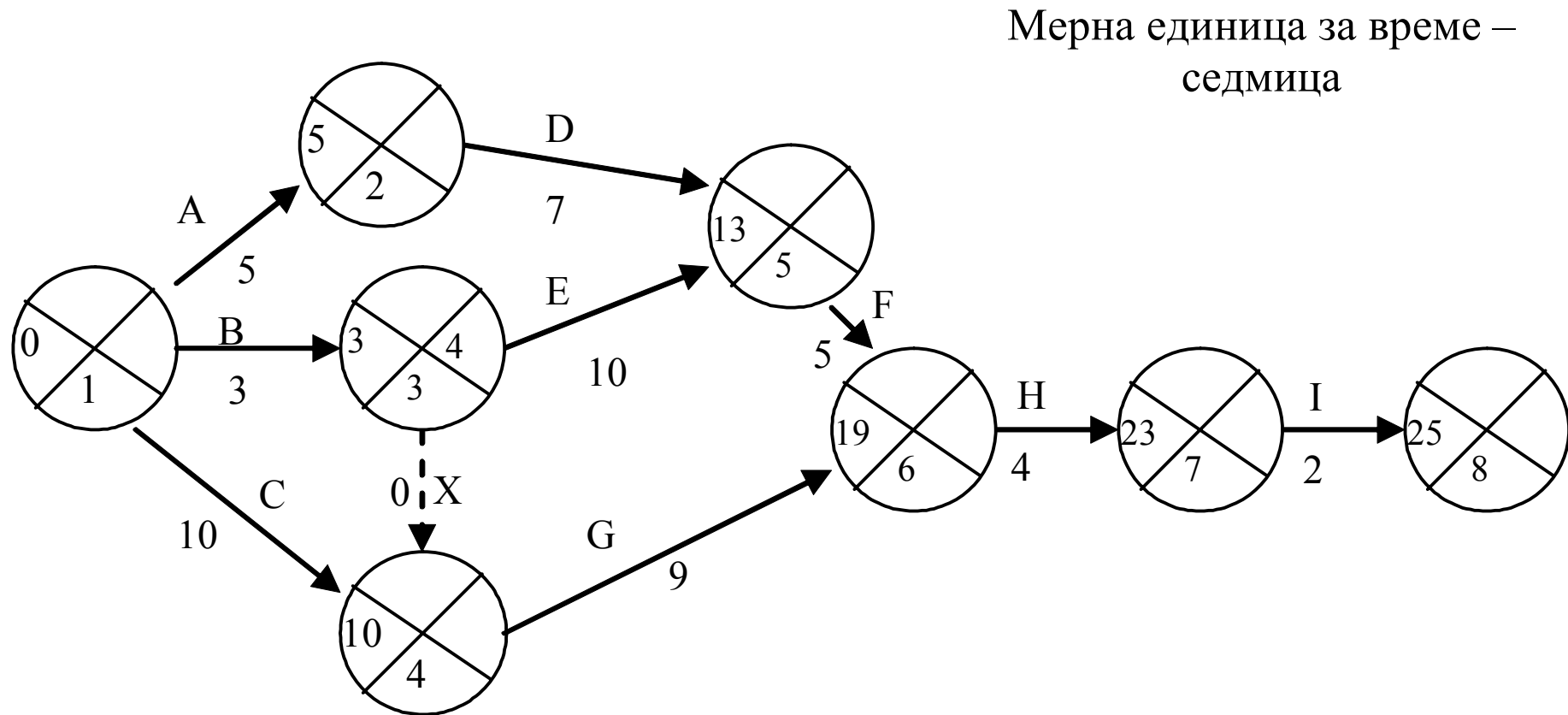


# Определяне на ранния срок за настъпване на събитие 4

Мерна единица за време – седмица



# Определяне на останалите ранни срокове

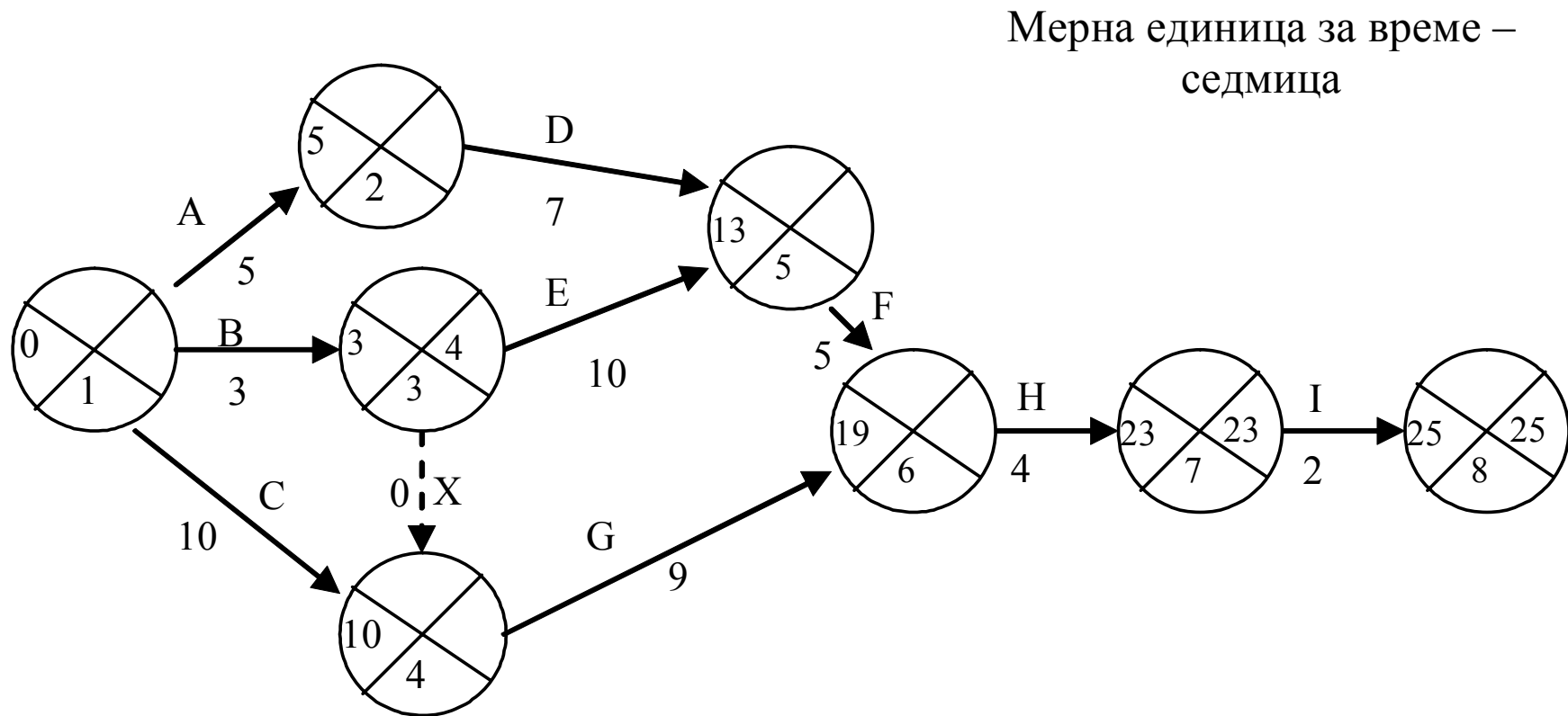




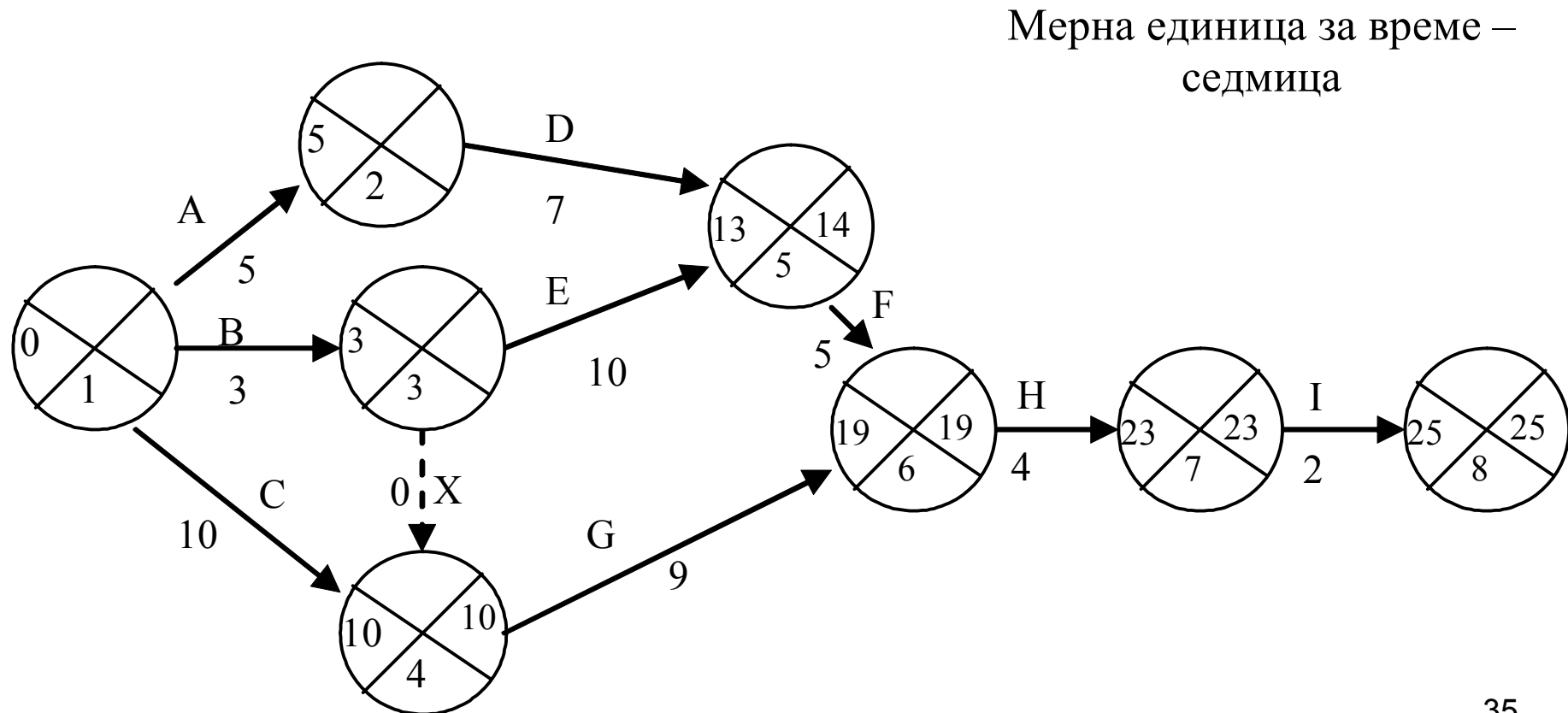
## 2. Определяне на късните срокове за настъпване на събитията

$$t_i'' = \begin{cases} t_n', & \text{при } i = n, \text{ (} n \text{ – крайно за проекта събитие)} \\ \min_{j>i} (t_j'' - y_{ij}), & \text{при } 1 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

# Определяне на късния срок за настъпване на събитие 7

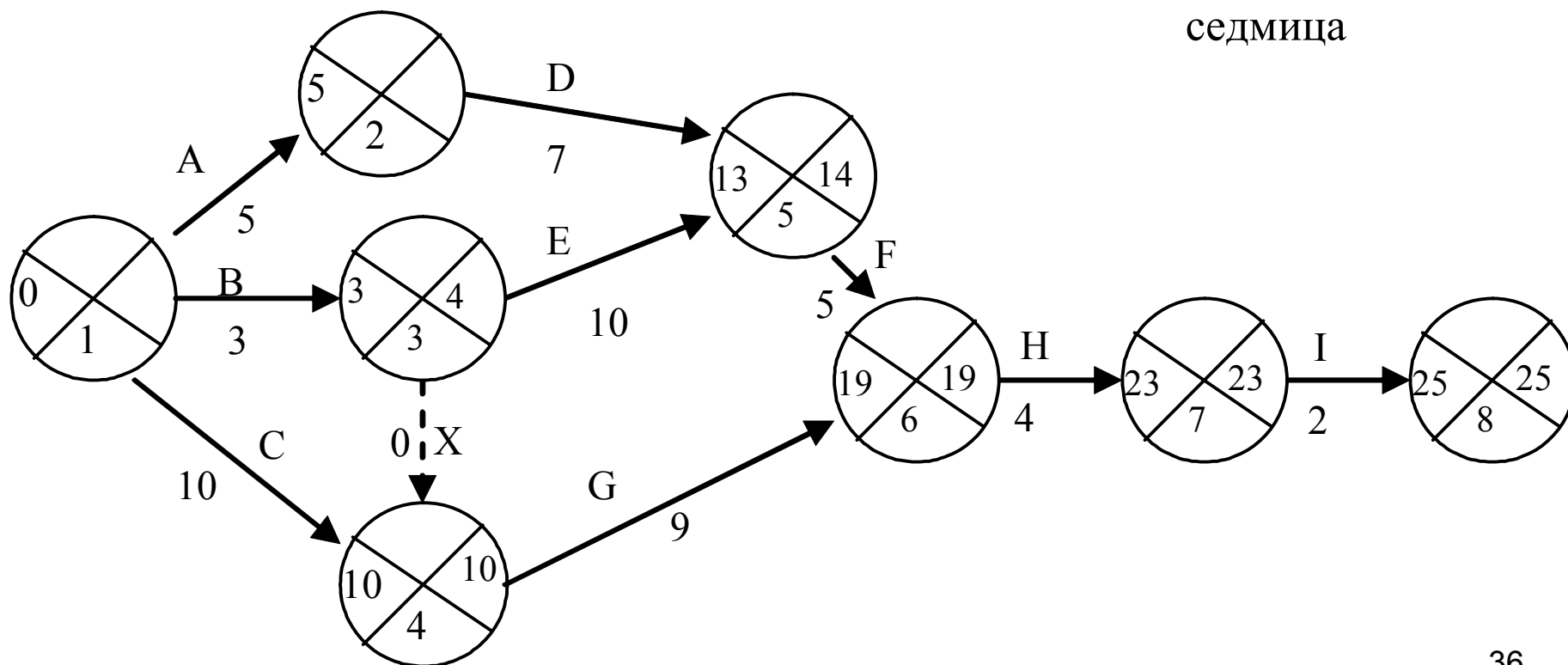


# Определяне на късните срокове за настъпване на събития 6, 5 и 4

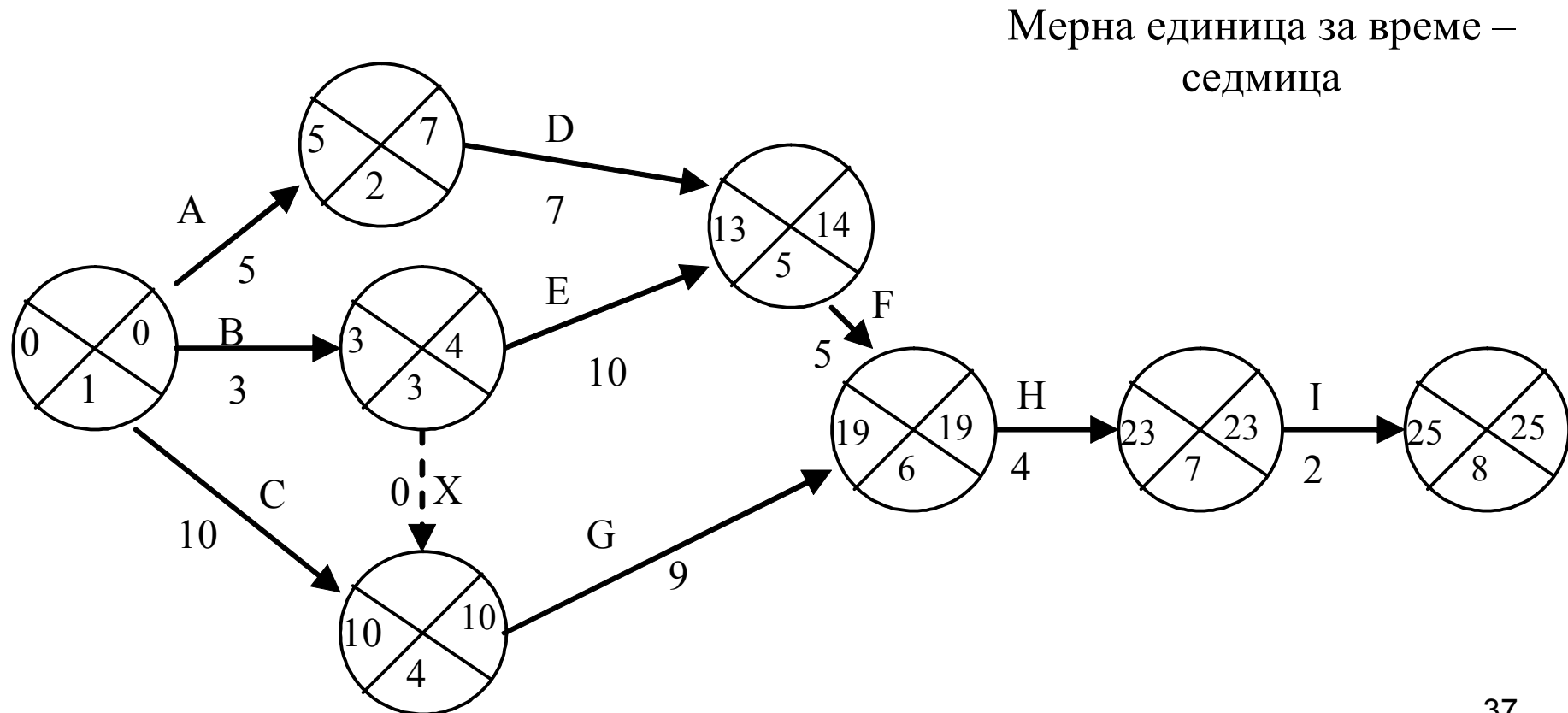


# Определяне на късния срок за настъпване на събитие 3

Мерна единица за време – седмица



# Определяне на останалите късни срокове

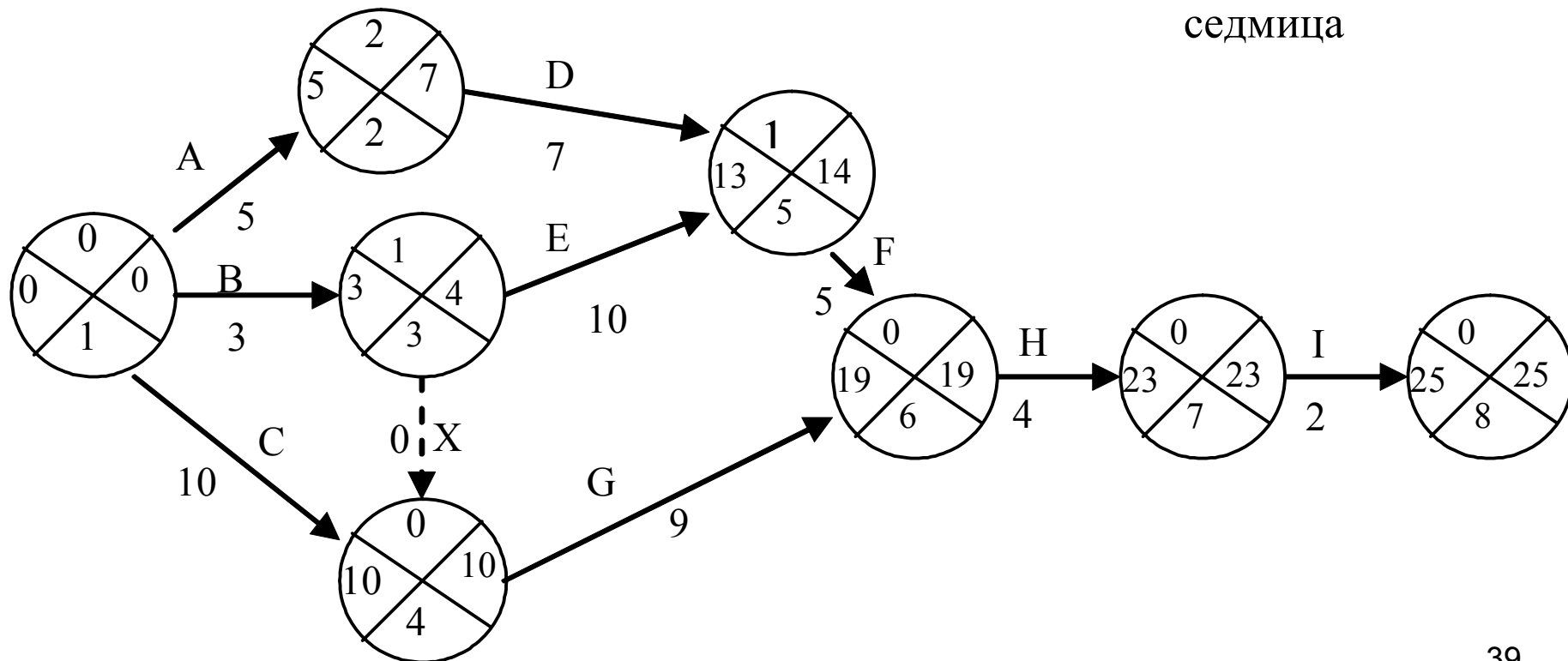


# Определяне на резерв от време на събития

Резерв от време на събитие  $i$  -  $R_i = t_i'' - t_i'$

# Определяне на резерв от време на събития - продължение

Мерна единица за време – седмица



### 3. Определяне на параметрите на работите

- Ранно начало на работа  $ij$  –  $t_{pn,ij} = t_i'$
- Късно завършване на работа  $ij$  –  $t_{kz,ij} = t_j''$

- Ранно завършване на работа  $ij$

$$t_{pz,ij} = t_{pn,ij} + y_{ij} = t_i' + y_{ij}$$

- Късно начало на работа  $ij$  -

$$t_{kn,ij} = t_{kz,ij} - y_{ij} = t_j'' - y_{ij}$$



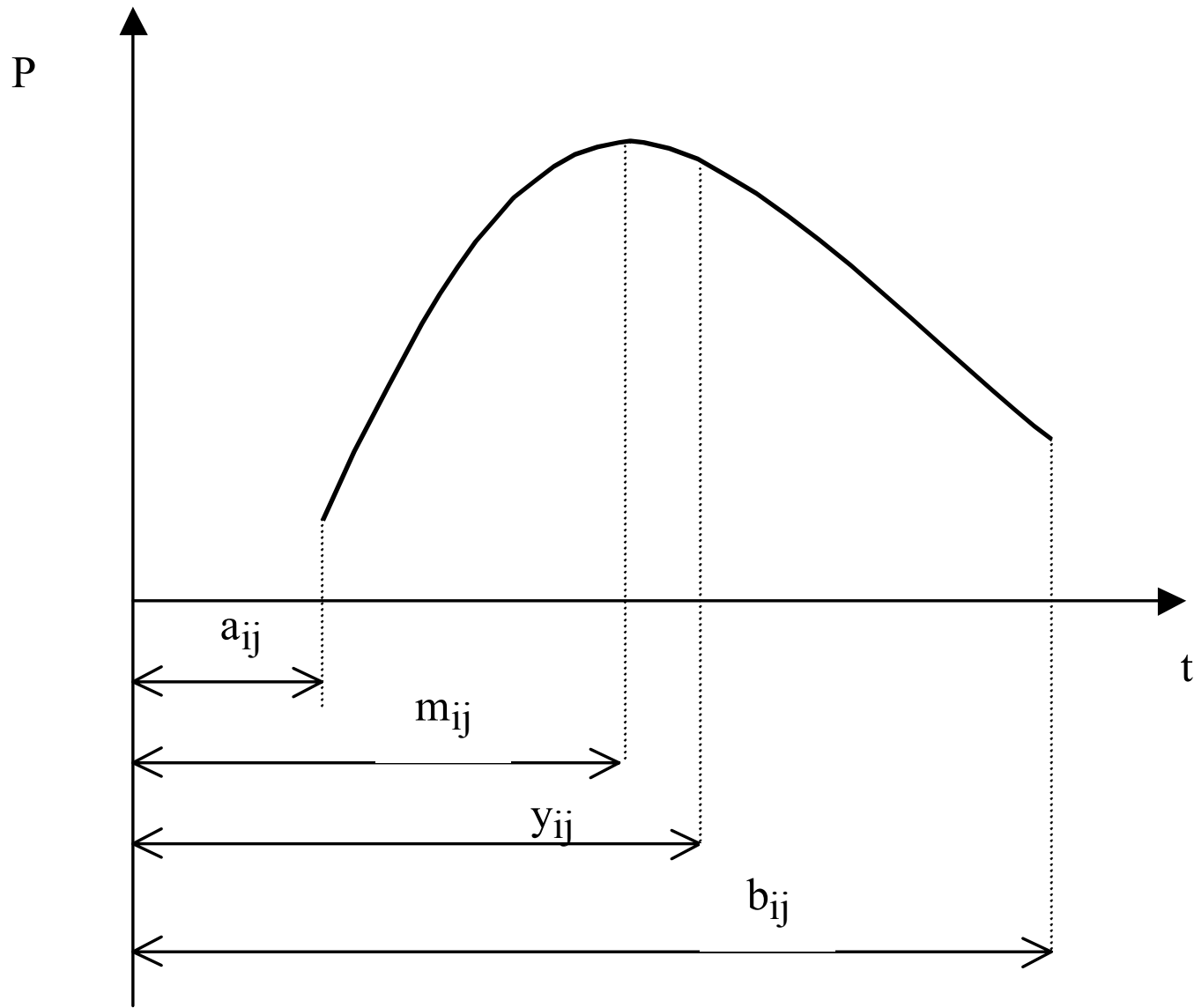
## 4. Резерв от време на работите

- Изчисляват се три вида резерв от време на работите:
- *Пълен (сумарен) резерв от време* - Максималната продължителност на закъснението на една работа, което няма да предизвика закъснение в реализацията на целия проект.
- *Свободен резерв от време* - Максималната продължителност на закъснението на една работа, което няма да повлияе върху началото на следващите работи, ако предшестващите работи са завършили възможно най-рано.
- *Независим резерв от време* - Максималната продължителност на закъснението на една работа, което няма да повлияе върху началото на следващите работи, ако предшестващите работи са завършили възможно най-късно.

20. Алгоритъм за решаване на  
мрежов модел при вероятностно  
задаване на продължителността  
на работите

Продължителността на работите  $Y_{ij}$  се представят като случайна величина с  $\beta$  разпределение. За всяка от продължителностите се правят три вида оценки:

- Минимална (оптимистична)  
продължителност  $a_{ij}$
- Максимална (песимистична)  
продължителност  $b_{ij}$
- Нормална (най-вероятна)  
продължителност  $m_{ij}$



- При изчисляване на параметрите на модела в този случай се използва очакваната стойност на продължителността, изчислена по формулата:

$$y_{ij} = \frac{a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij}}{6}$$

- За оценка на разсейването на величината спрямо очакваната стойност се използва показателят стандартно отклонение, който се изчислява по формулата:

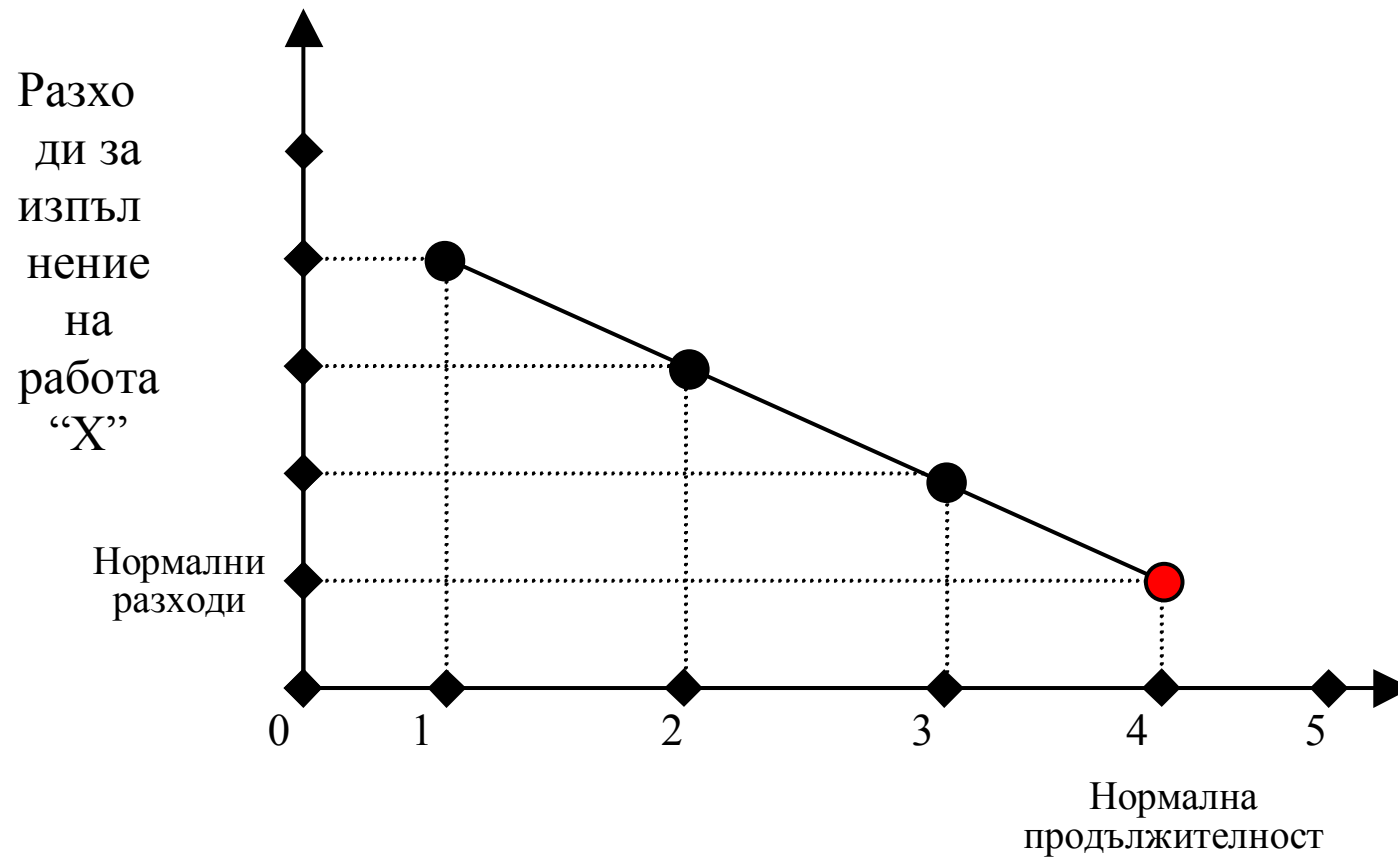
$$\sigma_{ij}^2 = \left( \frac{b_{ij} - a_{ij}}{6} \right)^2$$

21. Оптимизация на  
съотношението време-  
разходи при използване на  
мрежовите модели

Времето за изпълнение на някои от работите на проекта могат да се изпълняват за различно време, в зависимост от изразходваните ресурси. Възможно е някои от работите да бъдат изпълнени за по-кратко от нормалното време, но с цената на разход на допълнителни парични средства – за доплащания за удължено работно време на персонала, за временно наемане на допълнителен персонал, за наемане на допълнително оборудване, за възлагане на част от дейностите от работата на подизпълнители и т.н.



Намалението на времето за изпълнение на работите притежава определена физическа граница. Това време не може да бъде по-кратко от определена стойност, независимо от готовността на мениджърите да увеличават допълнително разходите за работата. За опростяване на изчисленията обикновено се приема, че времето е дискретна величина, т.е. че може да заема само цели стойности и че зависимостта между времето за изпълнение на работите и разходите за тях е линейна:



Време за изпълнение на работа "X"

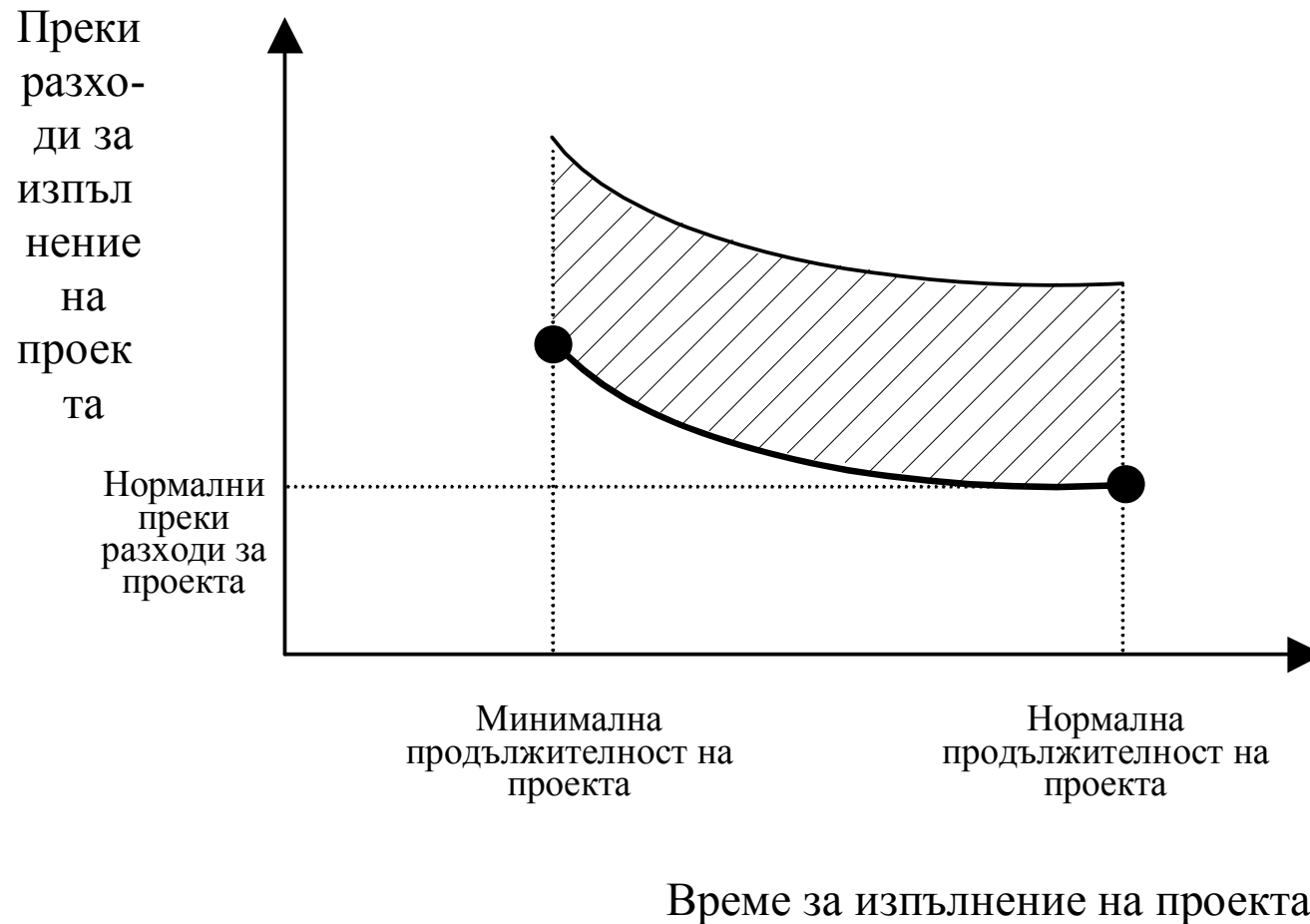
- Съкращаването на времето за изпълнение на една работа не води задължително до съкращаване на времето за изпълнение на целия проект. Съкращаването на некритичните работи води само до увеличаване на съответстващите им резерви от време. Следователно, ако целта е да се съкрати времето за изпълнение на целия проект е необходимо да се съкращава времето на критичните работи.

- Първоначално се започва със съкращаване на времето на онази критична работа, чиято еластичност на разходите спрямо времето е най-ниска. Когато се изчерпат възможностите за това, а е необходимо допълнително съкращаване на времето за изпълнение на целия проект, се пристъпва към съкращаване на следващата по отношение на еластичност на разходите работа и т.н.

- Съкращаването на критичните работи води до намаляване на дължината на критичния път, т.е. до намаляване на времето за изпълнение на целия проект. Едновременно с това трябва да се следи за поява на втори критичен път. Това ще се случи тогава, когато дължината на критичния път се изравни с втория по дължина пълен път. При такава ситуация по-нататъшното намаляване на времето за изпълнение на целия проект може да се постигне:

1. след едновременно съкращаване на дължината и на двата критични пътя, чрез едновременно съкращаване на две критични работи, разположени съответно на двата критични пътя.
2. Ако двата критични пътя притежават обща работа, то тяхното намаляване може да се постигне чрез съкращаване на времето на тази обща работа (разбира се, след преценка доколко това е изгодно).

# Взаимовръзка между времето за изпълнение на целия проект и преките разходи за изпълнение на работите по проекта



- Безусловно при всяка стъпка на намаляване на времето стремежът ще бъде разходите да се ограничат до минимално възможните (с други думи съотношението време – разходи да бъде позиционирано върху удебелената крива).



Оптимальното по отношение на общите разходи решение е онази продължителност на изпълнение на проекта, при която общите разходи са минимални.

